

Korrekturen zum Photon-Propagator

Andreas Messer

Lehrstuhl für Theoretische Physik 3

20. Juli 2007

Inhalt

- 1 Photonpropagator
- 2 Vakuumpolarisation
- 3 Renormierung
- 4 Folgen
- 5 Zusammenfassung

Lagrangedichte QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi - e\bar{\Psi}\not{A}\Psi \quad (1)$$

- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
- perturbative Berechnung von Streuquerschnitten und Lebensdauern
- Streumatrixelemente können mittels Feynmanregeln graphisch dargestellt werden

Photonpropagator

$$i\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} \left(g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) = \begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{wavy} \text{---} \bullet \\ \mu \qquad \qquad \nu \end{array}$$

- Wahrscheinlichkeitsamplitude für Propagation eines Photons
- ab $\mathcal{O}(\alpha)$ kommen Korrekturen hinzu

$$+ \begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{circle} \text{---} \bullet \\ \mu \qquad \qquad \nu \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{circle} \text{---} \text{circle} \text{---} \bullet \\ \mu \qquad \qquad \qquad \nu \end{array} + \dots$$

$$+ i\tilde{D}_{\mu\rho} i\Pi^{\rho\sigma} i\tilde{D}_{\sigma\nu} + i\tilde{D}_{\mu\rho} i\Pi^{\rho\sigma} i\tilde{D}_{\sigma\gamma} i\Pi^{\gamma\delta} i\tilde{D}_{\delta\nu} + \dots$$

- Resummierung (Dyson-Reihe)

$$i\tilde{G} = i \left(1 + \Pi \tilde{D} \right)^{-1} \tilde{D} = i \left(\tilde{D}^{-1} + \Pi \right)^{-1}$$

Irreduzible Diagramme

$$i\Pi^{\mu\nu} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots$$

- können nicht durch einfaches Aneinanderreihen aus kleineren Graphen gebildet werden
- Ward-Identität legt die Tensorstruktur fest: $k_\mu \Pi^{\mu\nu} \stackrel{!}{=} 0$ also

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \left(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) \Pi_2(k^2)$$

Vakuumpolarisation

Beiträge

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = \text{Diagram}$$

The diagram shows a fermion loop with two external photon lines. The left photon line has momentum k and the right one has momentum k . The top fermion line has momentum $p-k$ and the bottom one has momentum p . The vertices are labeled $-ie\gamma^\mu$ and $-ie\gamma^\nu$.

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \text{Sp} \left((-ie\gamma^\mu) S_F(p-k) (-ie\gamma^\nu) S_F(p) \right)$$

Problem

- UV divergent

Vakuumpolarisation

Feynmanparametrisierung

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = -4e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\dots}{((p-k)^2 - m^2) \cdot (p^2 - m^2)}$$

- Nenner kombinieren

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2}$$

- Substitution $p \rightarrow p + xk$
- ungerade Potenzen liefern keinen Beitrag und können ignoriert werden

Vakuumpolarisation

Dimensionale Regularisierung

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(m^2 - p^2)g^{\mu\nu} + 2p^\mu p^\nu + x(1-x)(k^2 g^{\mu\nu} - 2k^\mu k^\nu)}{(p^2 - \Delta)^2}$$
$$\Delta = m^2 + x(1-x)k^2$$

- Regularisierung des Integrals durch Übergang zu $d = 4 - \epsilon$ Dimensionen
- $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^\epsilon \frac{d^{4-\epsilon} p}{(2\pi)^{4-\epsilon}}$, $e^2/(4\pi\mu^\epsilon) \rightarrow \alpha$, $g_\mu^\nu g_\nu^\mu = d$
- Energieskala μ einführen um Kopplungskonstante dimensionlos zu halten

d-dimensionales Integral

Schritte zur Berechnung

- Übergang zu d-1 dimensionalen Kugelkoordinaten

$$\int d^d p = \int dp_0 dr r^{d-2} d\phi \prod_{i=1}^{d-3} d\theta_i \sin^i \theta_i$$

- $-\infty < p_0 < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 < \phi < 2\pi$, $0 < \theta_i < \pi$



$$\int_0^\pi d\theta \sin^{2n-1} \theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n + \frac{1}{2})}$$



$$\int_0^\infty dx x^{2a-1} (1+x^2)^{-a-b} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

d -dimensionales Integral

Allgemeines Ergebnis

$$\int d^d p \frac{1}{(p^2 + 2pq - \Delta)^\alpha} = \frac{i\pi^{d/2}}{(-q^2 - \Delta)^{\alpha-d/2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}$$

- alle weiteren Integrale durch Ableiten nach q^μ
- am Ende $q = 0$
- das Ergebnis definiert das Integral für nicht ganzzahlige d

Vakuumpolarisation

Regularisiertes Integral

$$\Pi_2^{\mu\nu} = \left(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) \cdot \left(-\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x (1-x) \left(-\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \right)$$

- erfüllt geforderte Tensorstruktur
- Divergenz tritt als Pol in $\epsilon \rightarrow 0$ auf
- Entwicklung in ϵ

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \left(-\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} &= 1 - \frac{\epsilon}{2} \log\left(-\frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right) \end{aligned}$$

Vakuumpolarisation

Vorläufiges Ergebnis

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -\left(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\right) \Pi_2(k^2)$$

$$\Pi_2(k^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \log \frac{x(1-x)k^2 - m^2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right)$$

- divergiert im Limes $\epsilon \rightarrow 0$

Renormierung

Idee

- Größen in der anfangs gezeigten Lagrangedichte entsprechen nicht den physikalisch bekannten Parametern

Methode

- Ausgangspunkt "nackte" Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{0\mu\nu} F_0^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_0} (\partial^\mu A_{0\mu})^2 + \bar{\Psi}_0 (i\not{\partial} - m_0) \Psi_0 - e_0 \bar{\Psi}_0 \not{A}_0 \Psi_0$$

- Reskalierung:

$$A_0^\mu = \sqrt{Z_A} A^\mu, \Psi_0 = \sqrt{Z_\Psi} \Psi, m_0 = Z_m m, e_0 = Z_e e, \xi_0 = Z_\xi \xi$$

- $Z_i = 1 + \delta Z_i$

Renormierte Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \mathcal{L}(A, \psi, m, e, \xi) \\ & - \frac{1}{2} \delta Z_A (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2} \delta Z_A (\partial^\mu A_\mu)^2 \\ & + \delta Z_\psi \bar{\psi} (\not{p} - m) \psi - \delta Z_m m \bar{\psi} \psi \\ & + \left(\delta Z_e + \delta Z_\psi + \frac{\delta Z_A}{2} \right) e \bar{\psi} \not{A} \psi\end{aligned}$$

- die δZ_i sind nicht alle unabhängig, z.B. $\delta Z_A = \delta Z_\xi$
- die renormierte Lagrangedichte erzeugt zusätzliche Feynmanregeln (Counterterme)

Renormierung

Photoncounterterm

$$\text{wavy line with cross} = -i\delta Z_A (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)$$

- muss bei der Ein-Schleifen-Korrektur berücksichtigt werden

$$i\Pi^{\mu\nu} = \text{loop diagram} + \text{wavy line with cross}$$

- wir wählen δZ_A so, das die Divergenz entfernt wird

$$\delta Z_A = -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}$$

Die Ein-Schleifen-Korrektur ist jetzt endlich!

Endergebniss

Inverser Photonpropagator

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(k) = -k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu$$

Photonpropagator bis Ordnung α

$$\begin{aligned} i\tilde{G}_{\mu\nu} &= i\left(\tilde{D}^{-1} + \Pi\right)_{\mu\nu}^{-1} = i\tilde{D}_{\mu\nu}(k) \cdot \frac{1}{1 + \Pi_2(k^2)} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= -\frac{i}{k^2} \left(g_{\mu\nu} + (\xi' - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \cdot \frac{1}{1 + \Pi_2(k^2)} + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

- $\xi' = \xi (1 + \Pi_2(k^2))$, ξ frei wählbar!
- Photon bleibt masselos

Kopplungskonstante

Observable unabhängig von μ

$$0 \stackrel{!}{=} \mu \frac{d}{d\mu} O(\mu, \alpha, m) = \mu \frac{\partial O}{\partial \mu} + \mu \left(\frac{d\alpha}{d\mu} \right) \left(\frac{\partial O}{\partial \alpha} \right) + \mu \left(\frac{dm}{d\mu} \right) \left(\frac{\partial O}{\partial m} \right)$$

- Renormierungsgruppengleichung (RGE)

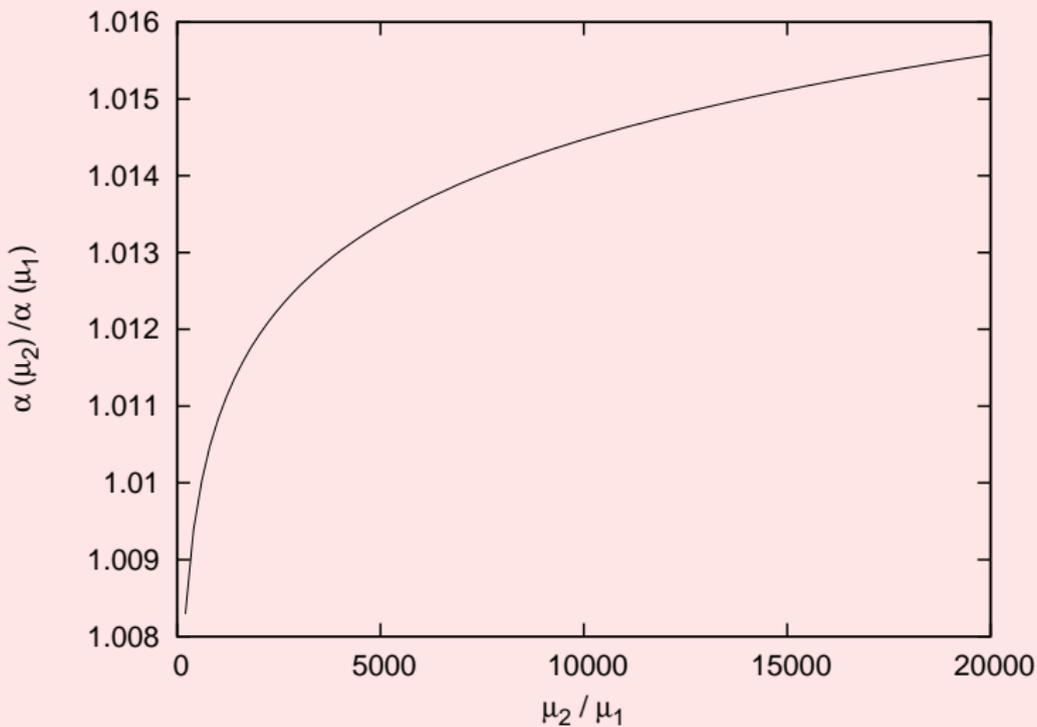
β -Funktion

$$\beta(\alpha) = -\mu \frac{d\alpha}{d\mu} = \beta_1 \alpha^2 + \beta_2 \alpha^3 + \dots$$

- $\alpha = \alpha_0 Z_\alpha^{-1}$, $Z_\alpha = Z_A^{-1} = \left(1 - \frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}\right)^{-1}$
 $\Rightarrow \alpha(\mu_2) = \alpha(\mu_1) \frac{1}{1 + \frac{2\alpha(\mu_1)}{3\pi} \ln \frac{\mu_1}{\mu_2}}$

Kopplungskonstante

Energieabhängige Kopplungskonstante



Zusammenfassung

- durch dimensionale Regularisierung treten die Divergenzen als Pole in ϵ auf
- Absorption der Divergenzen durch Renormierung
- Regularisierung und Renormierung führt zu energieabhängiger Kopplungskonstante

Literatur



Matthias Jamin.

Qcd and renormalisation group methods.

<http://personal.ifae.es/jamin/lehre/ml06/rgm06.ps.gz>, 2006.



Lewis H. Ryder.

Quantum field theory.

Cambridge University Press, Cambridge, 1985.