

Korrekturen zum Photon-Propagator

Andreas Messer
(Dated: 25. Juli 2007)

In der Quantenelektrodynamik werden Streuprozesse auf die Berechnung von Propagatoren und Vertizes zurückgeführt. In höheren Ordnungen der Störungsrechnung kommt es dabei zu Divergenzen die durch eine konsequente Renormierung der Theorie in die Massen, Feldstärken und Kopplungskonstanten absorbiert werden können. Als ein Teil des Renormierungsprozesses wurde hier der Photon-Propagator auf Ein-Schleifen Niveau berechnet.

I. EINLEITUNG

Die Quantenelektrodynamik (QED) erlaubt die sehr genaue Vorhersage von Streuprozessen der Elektrodynamik. Deren Wirkungsquerschnitte werden auf die Berechnung von Matrixelementen der Streumatrix zurückgeführt. Diese werden mittels Störungstheorie auf Basis der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi - e\bar{\Psi}\not{A}\Psi \quad (1)$$

berechnet. Dabei bedeutet

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2)$$

den elektromagnetischen Feldstärketensor. Die ersten beiden Terme des Lagrangedichte beschreiben das elektromagnetische Feld (Photonen), wobei der zweite Term zur Eichfixierung dient. Der dritte Term beschreibt geladene Spin-1/2-Teilchen wie z.B. Elektronen, Positronen oder Myonen. Die Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen und den Photonen wird durch den letzten Teil beschrieben.

Der Wirkungsquerschnitt eines (Zwei-Teilchen-)Streuprozesses ist dann mit

$$\sigma = \frac{(2\pi)^2}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot \delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - p_1 - p_2\right) \underbrace{\prod_f \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f}}_{d\Phi_n}$$

gegeben. Dabei bedeuten $d\Phi_n$ das invariante Phasenraumelement (Dichte der Endzustände im Phasenraum), p_i und m_i die Impulse und Massen der aneinander streuenden Teilchen und \mathcal{M}_{fi} ein Matrixelement der Streumatrix. Diese Matrixelemente werden mittels Störungstheorie auf Basis o.g. Lagrangedichte berechnet.

In niedrigster Ordnung Störungstheorie (erste Bornsche Näherung) kommt man so zu den sogenannten Baumgraphen. Für Møller-Streuung (Elektron-Elektron-Streuung) erhält man die Darstellung

$$\mathcal{M}_{fi} = \text{[Diagram 1]} - \text{[Diagram 2]} \quad (3)$$

für die Streuamplitude.

Geht man nun zu höheren Ordnungen der Störungstheorie, so kommen weitere Graphen hinzu. Ohne die Bremsstrahlung zu berücksichtigen ergibt sich

$$\mathcal{M}_{fi} = \text{[Diagram 1]} + 2 \text{[Diagram 2]} + \text{[Diagram 3]} + \text{[Diagram 4]} + \dots \quad (4)$$

Beim Berechnen dieser neuen Schleifendiagramme kommt es zu Divergenzen und somit zu einer unendlichen Streuamplitude, was keiner experimentellen Beobachtung entspricht. Glücklicherweise kann man diese Divergenzen durch Renormierung der QED entfernen.

II. KORREKTUR ZUM PHOTONPROPAGATOR

Der Photopropagator der QED in niedrigster Ordnung lautet

$$i\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} \left(g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) = \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad (5)$$

Betrachtet man nun höhere Ordnungen in der Störungstheorie, so kommen Korrekturen zu (5) hinzu:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \dots \\ &= \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \dots \\ i\tilde{G}_{\mu\nu} &= i\tilde{D}_{\mu\nu} + i\tilde{D}_{\mu\rho} i\Pi^{\rho\sigma} i\tilde{D}_{\sigma\nu} + i\tilde{D}_{\mu\rho} i\Pi^{\rho\sigma} i\tilde{D}_{\sigma\gamma} i\Pi^{\gamma\delta} i\tilde{D}_{\delta\nu} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

wobei die Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ nur irreduzible Schleifendiagramme enthält. Irreduzibel bedeutet hier, dass nur Schleifengraphen die nicht durch aneinanderreihen von einfacheren Graphen dargestellt werden können berücksichtigt werden:

$$i\Pi^{\mu\nu} = \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \dots \quad (7)$$

beinhaltet. Gleichung (6) stellt eine geometrische Reihe dar und kann zu

$$i\tilde{G}_{\mu\nu} = i \left(\tilde{D} (1 + \Pi \tilde{D})^{-1} \right)_{\mu\nu} \quad (8)$$

$$= i \left(\tilde{D}^{-1} + \Pi \right)_{\mu\nu}^{-1} \quad (9)$$

zusammengefasst werden. Diese Reihe wird auch als Dyson-Reihe bezeichnet. Der Vorteil ist, dass man nur die irreduziblen Graphen berechnen muss und alle reduzierbaren Kombinationen geschenkt bekommt.

Gleichung (9) legt es nahe mit dem inversen des Photonpropagators, der Vertex-Funktion $\hat{\Pi}^{\mu\nu}$ zu arbeiten

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu} = -i (\tilde{G}^{-1})^{\mu\nu} = -i \left((\tilde{D}^{-1})^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} \right) = -i \left((\tilde{D}^{-1})^{\mu\nu} + \Pi_2^{\mu\nu} + \mathcal{O}(e^4) \right) \quad (10)$$

wobei $\Pi_2^{\mu\nu}$ die Ein-Schleifen-Korrektur bedeutet.

III. VAKUUMPOLARISATION

Nun zur Berechnung der eben vorgestellte Ein-Schleifen-Korrektur (Vakuum polarisation). Es gilt

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = \begin{array}{c} p-k \\ \text{---} \text{---} \\ \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \\ k \quad k \\ \text{---} \text{---} \\ p \end{array} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \text{Sp} \left((-ie\gamma^\mu) S_F(p-k) (-ie\gamma^\nu) S_F(p) \right). \quad (11)$$

. Bereits durch Abzählen der Potenzen von p ($S_F(p) \sim 1/(p^2 - m^2)$) erkennt man, dass das Integral bei großen p divergiert.

Bevor es an das eigentliche Integral geht, kann man bereits jetzt eine Aussage über die Tensorstruktur von $\Pi_2^{\mu\nu}$ machen. So gilt aufgrund der Ward-Identität

$$k_\mu i\Pi_2^{\mu\nu}(k) = 0 \quad (12)$$

Da als Tensoren nur $g^{\mu\nu}$ und $k^\mu k^\nu$ zur Verfügung stehen folgt aus (12)

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(k) = i \left(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) \Pi_2(k^2) \quad (13)$$

Durch Auflösen der Spur in (11) erhält man

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = -4e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(m^2 - (p-k)_\sigma p^\sigma) g^{\mu\nu} + (p-k)^\mu p^\nu + p^\mu (p-k)^\nu}{((p-k)^2 - m^2) \cdot (p^2 - m^2)}. \quad (14)$$

Als nächstes kombiniert man mit Hilfe der Feynmanparametrisierung

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2} \quad (15)$$

die beiden Nenner des Integrals und erhält so

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(m^2 - (p-k)_\sigma p^\sigma) g^{\mu\nu} + (p-k)^\mu p^\nu + p^\mu (p-k)^\nu}{(x \cdot ((p-k)^2 - p^2) + p^2 - m^2)^2}. \quad (16)$$

In dieser Form nimmt man die Substitution $p \rightarrow p + xk$ vor, wodurch der Nenner symmetrisch in p wird:

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(m^2 - (p-k)_\sigma p^\sigma) g^{\mu\nu} + (p-k)^\mu p^\nu + p^\mu (p-k)^\nu}{\left((p-xk)^2 - \underbrace{(m^2 - x(1-x)k^2)}_{\Delta} \right)^2} \quad (17)$$

$$= -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [(m^2 - (p - (1-x)k)_\sigma (p+xk)^\sigma) g^{\mu\nu} + (p - (1-x)k)^\mu (p+xk)^\nu + (p+xk)^\mu (p - (1-x)k)^\nu] / (p^2 - \Delta)^2 \quad (18)$$

Ungerade Potenzen von p tragen dann nicht mehr zum Integral bei und können ignoriert werden. Ausmultiplizieren liefert

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(m^2 - p^2) g^{\mu\nu} + 2p^\mu p^\nu + x(1-x)(k^2 g^{\mu\nu} - 2k^\mu k^\nu)}{(p^2 - \Delta)^2}. \quad (19)$$

Als nächstes führt man das Integral über p aus. Da es jedoch divergiert, muss man es regularisieren. Eine Möglichkeit wäre das Integral an einer Grenze Λ abzuschneiden und nicht bis nach unendlich zu integrieren. Diese sogenannte Cut-Off Methode verletzt jedoch die Eichfreiheit des elektromagnetischen Feldes und führt so zum falschen Ergebnis. Ein Standardverfahren, bei dem dieses Problem nicht existiert ist die dimensionale Regularisierung. Dabei führt man das Integral nicht über vier sondern über $d = 4 - \varepsilon$ Dimensionen aus und läßt am Ende der Rechnung ε gegen null gehen.

Also schreiben wir für (19)

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = -\pi 16\alpha\mu^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^{4-\varepsilon} p}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \frac{(m^2 - p^2) g^{\mu\nu} + 2p^\mu p^\nu + x(1-x)(k^2 g^{\mu\nu} - 2k^\mu k^\nu)}{(p^2 - \Delta)^2}. \quad (20)$$

mit dem Parameter μ der die Dimension einer Energie hat und eine Skala einführt. Die Notwendigkeit für diesen Parameter wird am Ende der Rechnung klarer. Jedoch sieht man bereits hier, dass μ dafür sorgt, das die Energiedimension des Integrals unabhängig von ε ist und somit auch die Feinstrukturkonstante $\alpha = \mu^{-\varepsilon} e^2 / 4\pi$ einheitlos bleibt.

Als nächstes könnte man (20) mittels der Wick-Rotation in den euklidisieren werden um das Integral danach in Kugelkoordinaten auszuführen. Leider läßt sich der Term $p^\mu p^\nu$ nicht ohne Weiteres in Kugelkoordinaten umschreiben. Um einen Ausdruck für das Integral zu erhalten, geht man daher zunächst von einer allgemeineren Form aus, bei der man das Integral in einen zeitartigen Teil dp_0 und einen raumartigen Teil $d^{3-\varepsilon} p$ aufspaltet. Dann wird nur der Ortsteil in Kugelkoordinaten umgeformt. Nach [2, Kap. 9A] erhält man so

$$\int d^d p \frac{1}{(p^2 + 2pq - \Delta)^\alpha} = i\pi^{d/2} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(-q^2 - \Delta)^{\alpha - d/2}} \quad (21)$$

Durch Differenzieren nach q^μ und q^ν und Kontraktion mit $g_{\mu\nu}$ ergibt sich

$$\int d^d p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2pq - \Delta)^\alpha} = \frac{i\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha) (-q^2 - \Delta)^{\alpha - d/2}} \cdot \left(q^\mu q^\nu \Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (-q^2 - \Delta) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{d}{2}\right) \right) \quad (22)$$

$$\int d^d p \frac{p^2}{(p^2 + 2pq - \Delta)^\alpha} = \frac{i\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha) (-q^2 - \Delta)^{\alpha - d/2}} \cdot \left(q^2 \Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right) + \frac{d}{2} (-q^2 - \Delta) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{d}{2}\right) \right) \quad (23)$$

Mit diesen Ergebnissen geht (20) in

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = -i\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \left(-\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} (-\Delta g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu} + x(1-x)(k^2 g^{\mu\nu} - 2k^\mu k^\nu)) \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (24)$$

$$= i(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \cdot -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left(-\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (25)$$

über. Das Integral zerfällt in die gewünschte Tensorstruktur und in ein skalares Integral Π_2 wie Anfangs beschrieben. Mit den Taylornäherungen für kleine ε

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (26)$$

$$\left(-\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \log\left(-\frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) \quad (27)$$

findet man

$$\Pi_2(k^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \log \frac{x(1-x)k^2 - m^2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (28)$$

Durch das Verfahren der dimensional Regularisierung tritt die Divergenz also als Pol in ε auf. Die Amplitude der Korrektur ist unendlich, und scheint so ganz im Widerspruch zu einer perturbativen Rechnung zu stehen. Wie wir jedoch im nächsten Abschnitt sehen werden, kann man dieser und anderen Divergenzen durch eine Neuinterpretation der Lagrangedichte den Schrecken nehmen.

Am Ergebniss (28) sieht man jetzt auch anschaulich die Notwendigkeit einen Skalenparameter μ einzuführen: Der auftretende Logarithmus ist nur für dimensionslose Argumente definiert.

IV. MULTIPLIKATIVE RENORMIERUNG

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass in höheren Ordnungen Störungstheorie Divergenzen auftreten. Diese würden zu unendlichen Streuamplituden führen und somit die Physik der QED nicht mehr korrekt beschreiben. Es stellt sich also die Frage, ob der perturbative Ansatz überhaupt korrekt ist und wenn ja, was dann die Divergenzen bedeuten.

Um ein Gefühl für die Bedeutung der Divergenzen zu bekommen betrachten wir noch einmal die Lagrangedichte (1) auf deren Basis wir im letzten Abschnitt das Ein-Schleifen-Integral berechnet haben. In dieser Lagrangedichte kommen verschiedene Parameter vor, die man in niedrigster Ordnung Störungstheorie als die Elektronladung e und die Elektronmasse m interpretieren kann und dann mit dem Experiment übereinstimmende Ergebnisse erhält. Eigentlich gibt es jedoch keinen Grund anzunehmen, dass e und m den bekannten Werten entsprechen. Genau an dieser Stelle setzt die sogenannte Renormierung an. Es ist nämlich möglich, die Parameter genau so zu wählen, dass alle Amplituden endliche Werte annehmen.

Betrachten wir dazu einmal die sogenannte nackte Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_{0\nu}) (\partial^\mu A_0^\nu) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi_0} \right) (\partial^\mu A_{0\mu})^2 + \bar{\Psi}_0 (\not{\partial} - m_0) \Psi_0 - e_0 \bar{\Psi}_0 \not{A}_0 \Psi_0 \quad (29)$$

, die der bekannten Lagrangedichte mit anders bezeichneten Größen entspricht. Der Index 0 ist dazu da, um sie von den physikalischen Größen zu unterscheiden. Nun dividieren wir alle Parameter und Felder dieser Lagrangedichte durch einen Parameter:

$$\begin{aligned} A_0^\mu &= \sqrt{Z_A} A^\mu \\ \Psi_0 &= \sqrt{Z_\Psi} \Psi \\ m_0 &= Z_m m \\ e_0 &= Z_e e \\ \xi_0 &= Z_\xi \xi \end{aligned}$$

und verwenden dann $Z_i \approx 1 + \delta Z_i$ um die renormierte Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}(A, \Psi, m, e, \xi) \\ & - \frac{1}{2} \delta Z_A (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2} \left(\delta Z_A \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) + \frac{\delta Z_\xi}{\xi} \right) (\partial^\mu A_\mu)^2 \\ & + \delta Z_\Psi \bar{\Psi} (\not{p} - m) \Psi - \delta Z_m m \bar{\Psi} \Psi \\ & + \left(\delta Z_e + \delta Z_\Psi + \frac{\delta Z_A}{2} \right) e \bar{\Psi} \not{A} \Psi \end{aligned}$$

zu erhalten. Diese besteht zum einen aus der bekannten Lagrangedichte (1) und zusätzlichen Termen. Die neuen Terme erzeugen natürlich Feynmanregeln, die man als Counterterm-Vertizes bezeichnet:

$$\begin{aligned} \text{wavy line with cross} &= -i \delta Z_A \left(k^2 g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\mu k^\nu \right) + i \frac{\delta Z_\xi}{\xi} k^\mu k^\nu \\ \text{fermion line with cross} &= i \delta Z_\Psi (\not{p} - m) - i \delta Z_m m \\ \text{photon-fermion vertex with cross} &= -i \left(\delta Z_e + \delta Z_\Psi + \frac{\delta Z_A}{2} \right) e \gamma^\mu \end{aligned}$$

Diese zusätzlichen Regeln bedeuten aber, dass der Inverse Propagator (10) um einen weiteren Beitrag ergänzt werden muss:

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu} = -i \left((\tilde{D}^{-1})^{\mu\nu} + \Pi_2^{\mu\nu} + \Pi_{\text{counter}}^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) \quad (30)$$

über, wobei $\Pi_{\text{counter}}^{\mu\nu}$ den Countervertex für das Photon

$$\Pi_{\text{counter}}^{\mu\nu} = -\delta Z_A (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \quad (31)$$

bedeutet. (Es gilt $\delta Z_A = \delta Z_\xi$, s.u.) Wir wählen jetzt $\delta Z_A = -2\alpha/3\pi\epsilon$ und sehen, dass der Countervertex die Divergenz in $\Pi_2^{\mu\nu}$ absorbiert und der inverse Photonpropagator mit Korrekturen endlich wird:

$$i\hat{\Pi}^{\mu\nu} = (\tilde{D}^{-1})^{\mu\nu} + (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{\gamma}{6} + \int_0^1 dx x(1-x) \log \frac{x(1-x)k^2 - m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (32)$$

Das bedeutet also, dass die in der renormierte Lagrangedichte vorkommenden Parameter endlich sind und damit als physikalische Ladung und Masse interpretiert werden dürfen.

Auf ähnliche Weise können der Elektronpropagator und der Wechselwirkungsververtex endlich gemacht werden. Dadurch erhält man dann eine vollständige Lagrangedichte, die bis zur Ordnung α^2 korrekte Ergebnisse liefert.

Die oben eingeführten Renormierungsfaktoren δZ_i sind nicht alle unabhängig und unterliegen einigen Bedingungen, die hier der Vollständigkeit wegen kurz angeführt werden sollen:

- Pol des exakten Elektronpropagators soll an der Stelle $p^2 = m_{\text{phys}}^2$ liegen. (Festlegung der physikalischen Elektronmasse)

$$\Rightarrow \Sigma_v(m_{\text{phys}}^2) + \Sigma_s(m_{\text{phys}}^2) - \frac{\delta Z_m}{m_{\text{phys}}} = 0$$

wobei Σ_v und Σ_s die Korrekturen zum Elektronpropagator bedeuten.

- Residuum am Pol des Elektronpropagator gleich eins.

$$\Rightarrow \delta Z_\Psi = -\Sigma_v(m_{\text{phys}}^2) - 2m_{\text{phys}}^2 \left(\left(\Sigma_v(m_{\text{phys}}^2) \right)' + \left(\Sigma_s(m_{\text{phys}}^2) \right)' \right)$$

- Residuum am Pol des Photonpropagators gleich eins.

$$\Rightarrow \delta Z_A = -\left(\Pi_T^{\mu\nu}(k^2=0) \right)'$$

- Transversale Polarisation des Photons.

$$\Rightarrow \delta Z_A = \delta Z_\xi$$

- Physikalische Ladung definiert durch eeA-Vertex mit 'on-shell' Photon. ($\bar{u}(p) i e_{\text{phys}} \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p) \hat{\Lambda}^\mu(k=0, p, p) u(p)$ mit dem exakten eeA-Vertex $\hat{\Lambda}$)

$$\Rightarrow \delta Z_e = -\frac{\delta Z_A}{2} \quad \left(Z_e = \frac{1}{\sqrt{Z_A}} \right)$$

V. LAUFENDE KOPPLUNG

Im vorhergehenden Abschnitten haben wir gesehen, wie man durch Regularisierung und Renormierung die Divergenzen genau definieren und dann in Parametern absorbieren kann. Dabei war es notwendig einen Skalenparameter μ einzuführen. Dieser tritt in der Ein-Schleifen-Korrektur in ein Logarithmus auf und sollte in der Größenordnung des Impulses k gewählt werden damit der Betrag der Korrektur nicht zu groß wird. Somit entspricht μ der Energieskala, in der unser Prozess abläuft. Da wir im Prinzip μ jedoch beliebig wählen dürfen, muss eine physikalische Observable O unabhängig vom konkreten Wert von μ sein. Wir benutzen den dimensionslosen Operator $\mu \frac{d}{d\mu}$ um zu fordern [4]

$$0 \stackrel{!}{=} \mu \frac{d}{d\mu} O(\mu, \alpha, m) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} O + \mu \left(\frac{d\alpha}{d\mu} \right) \left(\frac{\partial O}{\partial \alpha} \right) + \mu \left(\frac{dm}{d\mu} \right) \left(\frac{\partial O}{\partial m} \right) \quad (33)$$

Dies ist die Renormierungsgruppen Gleichung, die dazu verwendet werden kann, das Phänomen der laufenden Kopplung zu beschreiben. Die α Abhängigkeit fast man in der sog. β -Funktion

$$\beta(\alpha) = -\mu \frac{d\alpha}{d\mu} = \beta_1 \alpha^2 + \beta_2 \alpha^3 + \dots \quad (34)$$

zusammen. Terme der mit Ordnung kleiner α^2 kommen nicht vor, da die Betafunktion erst ab dieser Ordnung Störungstheorie definiert werden kann. Wir schreiben das totale Differential in (34) in anderer Form

$$\beta(\alpha) = -\mu \frac{d\alpha}{d\mu} = -\mu \left(\frac{1}{Z_\alpha} \frac{d\alpha_0}{d\mu} - \frac{\alpha_0}{Z_\alpha^2} \left(\frac{d\alpha}{d\mu} \right) \left(\frac{dZ_\alpha}{d\alpha} \right) \right) = \alpha \left(\varepsilon - \frac{\beta(\alpha)}{Z_\alpha} \left(\frac{dZ_\alpha}{d\alpha} \right) \right) \quad (35)$$

und setzen

$$Z_\alpha = Z_A^{-1} = \left(1 - \frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon} \right)^{-1} \quad (36)$$

sowie die Entwicklung (34) ein:

$$\beta_1 \alpha^2 + \beta_2 \alpha^3 + \dots = \alpha \left(\varepsilon - (\beta_1 \alpha^2 + \beta_2 \alpha^3 + \dots) \frac{\frac{2}{3\pi\varepsilon}}{1 - \frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}} \right) \quad (37)$$

Ein Koeffizientenvergleich in α liefert

$$\beta_1 = -\frac{2}{3\pi} \quad (38)$$

für den ersten Koeffizienten der Beta-Funktion. Nun kann man (34) aber auch direkt integrieren, da es sich um ein totales Differential handelt:

$$-\int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\mu} = \ln \frac{\mu_1}{\mu_2} = \int_{\alpha(\mu_1)}^{\alpha(\mu_2)} \frac{d\alpha}{\beta_1 \alpha^2} = \frac{1}{\beta_1} \left(\frac{1}{\alpha(\mu_1)} - \frac{1}{\alpha(\mu_2)} \right) \quad (39)$$

Dies bedeutet aber, das die Kopplungskonstante energieabhängig wird. Dieser Fakt wird auch durch Experimente belegt. Für die Feinstrukturkonstante erhalten wir schließlich:

$$\alpha(\mu_2) = \alpha(\mu_1) \frac{1}{1 + \frac{2\alpha(\mu_1)}{3\pi} \ln \frac{\mu_1}{\mu_2}} \quad (40)$$

Der Verlauf ist in Abbildung 1 dargestellt.

VI. ZUSAMMENFASSUNG

Die Quantenfeldtheorie ist eine mächtige Methode zur Beschreibung hochrelativistischer Streuprozesse. Der Perturbative Ansatz führt in höheren Ordnungen scheinbar zu unphysikalischen Divergenzen. Diese können jedoch durch Renormierung in den Parametern absorbiert werden. Dieser Vorgang wurde hier anhand des Photonpropagators dargestellt.

[1] T. Binoth, *übungen zu strahlungskorrekturen in eichtheorien*, <http://maria-laach.physik.uni-siegen.de/2004/Folien/Binoth/binoth.ps.gz> (2004).

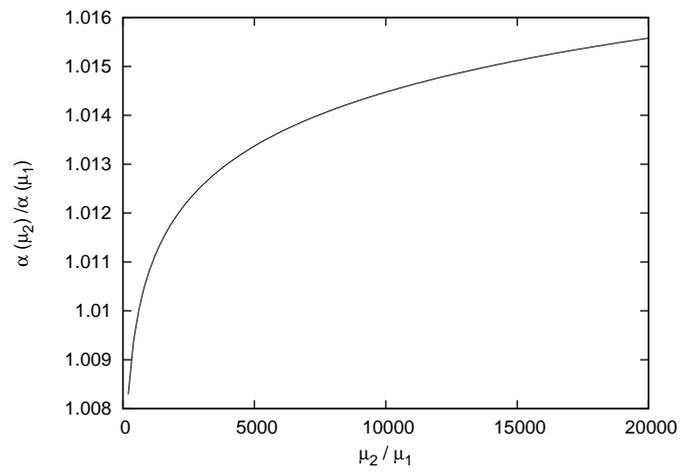


Abbildung 1: Energieabhängige Kopplungskonstante

[2] L. H. Ryder, *Quantum field theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).

[3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995).

[4] M. Jamin, *Qcd and renormalisation group methods*, <http://personal.ifaef.es/jamin/lehre/ml06/rgm06.ps.gz> (2006).