

# Supraleitung

Andreas Messer und Michael Wießner

In diesem Versuch des F-Praktikums wurde die Supraleitung einer Zinnprobe untersucht. Dabei konnte in einem Kryostaten mit flüssigem Helium auf die kritische Temperatur  $T_c = (3,80 \pm 0,01)K$  gekühlt bestimmt, ab der die Supraleitung eintritt. Darüber hinaus konnte die Abhängigkeit der kritischen Temperatur vom äußeren Magnetfeld  $B$ , sowie die kritische Magnetfeldstärke  $B_c = (29,1 \pm 0,8)mT$  für  $T=0$  K bestimmt werden.

Versuchsdurchführung: 02. Oktober 2006

Protokollabgabe: 05. Oktober 2006

## I. EINLEITUNG

Mit der Entdeckung der Supraleitung von Metallen in der Nähe des absoluten Nullpunktes durch Heike Kamerling Onnes im Jahre 1911 wurde ein Phänomen der Tieftemperaturphysik entdeckt, welches in all seinen Details bis heute noch nicht vollständig verstanden ist[2]. Erst durch die Möglichkeit der Heliumverflüssigung war es ihm möglich geworden, den Widerstand von unterschiedlichen Materialien bei Temperaturen unter 5K zu messen. Bei der Messung an Quecksilber konnte Onnes erstmals einen Sprung des elektrischen Widerstandes bei einer kritischen Temperatur  $T_c$  auf einen nicht messbar kleinen Wert beobachten, dem Einsetzen der Supraleitung. Bei der Untersuchung an weiteren Materialien konnte ebenfalls die Supraleitung beobachtet werden, wobei die kritischen Temperaturen materialspezifisch waren. Meissner und Ochsenfeld entdeckten bei ihren Untersuchungen an Supraleitern den nach ihnen benannten Effekt: Im Inneren von Supraleitern können keine Magnetfelder existieren. F. und H. London lieferten mit den gleichnamigen Gleichungen eine phänomenologische Erklärung für das beobachtete Verdrängen von Magnetfeldern aus dem Supraleiter. Mit einem thermodynamischen Ansatz konnte Ginzburg und Landau 1950 die Supraleitung in einigen ihrer makroskopischen Eigenschaften erklären. In der selben Zeit konnte die Supraleitung an verschiedenen Isotopen untersucht werden, die Ergebnisse wurden von Baarden, Cooper und Schrieffer 1956/57 aufgegriffen, um die Supraleitung quantenmechanisch zu erklären. Darüber hinausgehend sind heute Hochtemperatursupraleiter bekannt, deren Sprungtemperatur mit bis zu  $T=133$  K durch Stickstoffkühlung erreichbar ist.

Für unser Experiment allerdings kam eine Zinnprobe als Supraleiter 1. Art zum Einsatz. Im Versuch wurde die Sprungtemperatur  $T_c = (3,80 \pm 0,01)K$  gemessen, desweiteren konnten wir die Abhängigkeit der kritischen Temperatur vom Magnetfeld  $B_c(T) = B_{c0} \left(1 - (T/T_c)^2\right)$  mit  $B_{c0} = (35,8 \pm 0,8)mT$  bestimmen.

## II. THEORIE

Kühlt man Supraleiter unter ihre kritische Temperatur, so verschwindet deren elektrischer Widerstand - Ströme können nahezu unendlich lange durch den Leiter fließen, solange sich dieser im supraleitenden Zustand befindet. Beim Verhalten in äußeren Magnetfeldern unterscheiden sich Supraleiter: Während Supraleiter 1. Art bis zu einer kritischen Magnetfeldstärke  $H_c$  feldfrei sind, existiert bei Supraleitern 2. Art eine 2. Phase (Shubnikov-Phase), in der ein Magnetfeld eindringt. Ab einem Magnetfeld  $H_{c1}$  nimmt die Magnetisierung kontinuierlich bis  $H_{c2}$  auf null ab. Im folgenden werden allerdings nur noch Supraleiter 1. Art betrachtet.

Der Übergang vom normalleitenden in den supraleitenden Zustand tritt nur unter bestimmten Voraussetzungen auf:

- kritische magnetische Feldstärke  $H < H_c$
- Stromstärke  $I$  durch den Leiter kleiner  $I_c$
- Temperatur  $T < T_c(H)$

Die BCS-Theorie kann Erklärungen für dieses Verhalten in konventionellen Supraleitern geben. Bewegt sich ein Elektron durch das Kristallgitter, kann es dieses polarisieren. Ein zweites Elektron kann diese Polarisation sehen, es entsteht effektiv eine Bindung zu einem Cooperpaar. Ein Beleg für die Bindung über den Austausch eines virtuellen Phonons ist die unterschiedliche Sprungtemperatur bei Isotopen eines Elements. Für die gebundenen Elektronen gilt: Impuls  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$  und Spin  $s_{z1} = -s_{z2}$ . Dadurch fallen die Cooperpaare unter die Bose-Einstein-Statistik, alle Paare können sich im Grundzustand befinden und werden durch eine Gesamtwellenfunktion beschrieben. Diese kann nicht mehr am Kristall gestreut werden, somit kann der Strom widerstandslos fließen. Die Bindungsenergie ist allerdings so gering ( $\approx 1meV$ ), so dass bei einer kritischen Temperatur  $T_c$  die thermische Bewegungsenergie größer als die Bindung wird. Außerdem können Magnetfelder,  $B_c$ , oder Ströme,  $I_c$ , zu kinetischen Energien führen, die die Bindung auflösen.

Mit Hilfe der Thermodynamik konnte die schon erwähnte Gleichung zwischen Magnetfeld und kritischer Temperatur gefunden werden, durch eine Reihenentwicklung kommt man zu:

$$B_c(T) = B_{c0} \left(1 - (T/T_c)^2\right) \quad (1)$$

Die elektrodynamischen Eigenschaften (z.B. Meissner-Ochsenfeld-Effekt) von Supraleitern beschreiben die London-Gleichungen[3]:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{m}{ne^2} \nabla \times \vec{j} \\ \frac{d}{dt} \vec{j} &= \frac{ne^2}{m} \vec{E} \end{aligned} \quad (2)$$

Mit Hilfe der Maxwellgleichungen kann das Magnetfeld an der Oberfläche des Supraleiters bestimmt werden. Das Magnetfeld wird im Supraleiter nicht ganz verdrängt, sondern es nimmt exponentiell beim Eindringen in den Leiter ab, man erhält die Eindringtiefe:

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 ne^2}} \quad (3)$$

mit der Ladungsträgerdichte  $n$  und der Elektronenmasse  $m$ .

Weiterhin ist die Probengeometrie verantwortlich für die Feldverteilung an der Oberfläche. Der Entmagnetisierungsfaktor ist abhängig von der Form des Supraleiters, dadurch kann in Teilen des Supraleiters das kritische Magnetfeld  $H_c$  überschritten werden - es existieren supra- und normaleitende Bereiche. Dadurch entsteht ein effektives Magnetfeld  $H_{eq}$ , das nicht dem äußeren Feld  $H_a$  entsprechen muss. Für den im Praktikum verwendeten Supraleiter ist der Entmagnetisierungsfaktor  $n=0$ , somit gibt es keine Mischzustände, die Supraleitung sollte plötzlich einsetzen.

Im Versuch wurde flüssiges Helium zur Kühlung der Zinnprobe eingesetzt. Dieses zeigt bei solch tiefen Temperaturen ein ungewöhnliches Verhalten, He-4 wird nämlich am  $\lambda$ -Punkt  $T_\lambda = 2,1768K$  superfluid. Es verliert jegliche Viskosität und hat eine perfekte Wärmeleitfähigkeit, was dazu führt, dass superfluides Helium nur noch an der Oberfläche siedet.

### III. EXPERIMENT

Alle Versuchsteile des Experimentes werden in einem Kryostaten durchgeführt, der prinzipiell aus vier ineinander gestapelten Kammern (Abb. 1) besteht.

Die äußerste Kammer (1) wurde evakuiert, um möglichst wenig Außenwärme in das System zu bringen, die nächste Kammer (2) ist mit flüssigem Stickstoff gefüllt ( $T_{Siede} = 77K$ ). Mit diesem konnte die Apperatur vorgekühlt werden, im Experiment musste dieser immer wieder nachgefüllt werden. Die nächste Kammer (3) ist wieder evakuiert, in der innersten (4) schließlich befindet sich

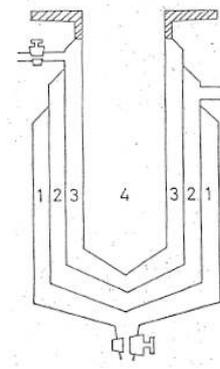


Abb. 1: Aufbau des Kryostaten aus [3]

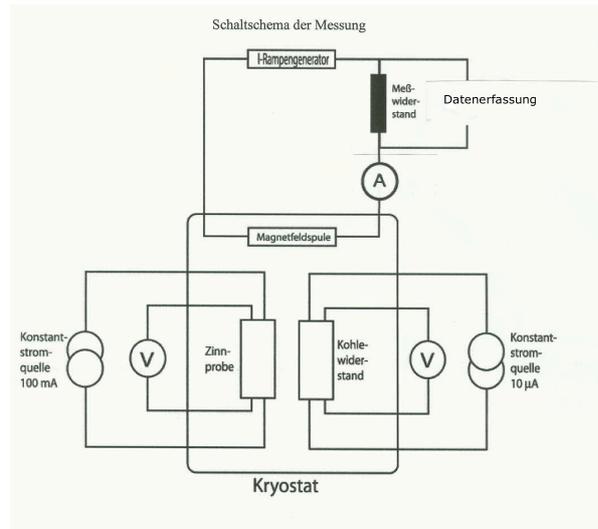


Abb. 2: Schaltschema der Messung aus [1]

das flüssige Helium, sowie der gesamte Versuchsaufbau. Die Temperatur im Kryostaten kann durch kontrolliertes Abpumpen des Heliums (Verändern des Dampfdrucks) eingestellt werden.

Die Zinnprobe selbst wurde dabei als Draht in Längsrichtung um einen Trovidur-Zylinder gewickelt, einerseits um einen Entmagnetisierungsfaktor von  $n=0$  zu erhalten, andererseits um überhaupt einen Widerstand im normalleitenden Zustand messen zu können. Der Probenzylinder befindet sich in Längsrichtung in einer Spule (Magnetfeld am gesamten Supraleiter gleich, Entmagnetisierungsfaktor  $n=0$ ), um ein äußeres Magnetfeld anlegen zu können. Zusammen mit einem Kohlewiderstand befinden sich die drei Teile auf einem Spieß, mit dem sie im Helium befestigt sind (Abbildung 2). Das Magnetfeld in der Spule kann man näherungsweise mit der Formel [3]

$$B = \mu_0 \frac{2\pi n I}{10(r_a - r_i)} \ln \left( \frac{r_a + \sqrt{r_a^2 + l^2}}{r_i + \sqrt{r_a^2 + l^2}} \right) \quad (4)$$

berechnen ( $B = (39,45 \cdot I/[A])mT$ ), oder numerisch indem man mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetz das Magnet-

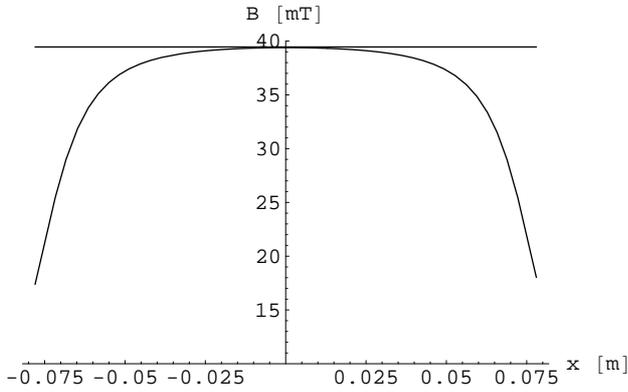


Abb. 3: Vergleich des numerisch berechneten Magnetfeldes mit dem nach (4) berechneten Feld in der Spulenmitte

feld von kreisförmigen Leiterschleifen

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (5)$$

zu einem Gesamtfeld überlagert. Die Daten der Spule sind in Tabelle I zusammengefasst; wenn man annimmt, dass in der Spule die Drähte dichtgewickelt sind und  $r_a - r_i = 1\text{ cm}$  kommt man auf 20 Lagen Draht (304 Windungen/Lage). Somit erhält man bei  $z=0$ :  $B = (39,39 \cdot I/[A])\text{ mT}$ , wobei wir diesen Wert in der Auswertung verwendet haben.

Tabelle I: Parameter der Kupferspule

Spulenlänge	$2l = 15,60\text{ cm}$
Innendurchmesser	$2r_i = 2,30\text{ cm}$
Außendurchmesser	$2r_a = 4,31\text{ cm}$
Drahtdurchmesser	$d = 0,05\text{ cm}$
Windungszahl	$N = 4865$

Da die Messung der Temperatur mittels Druckmessung beim Erwärmen des Kryostaten zu falschen Werten führt (gemessener Dampfdruck steigt beim Erwärmen stärker an als der wirkliche Dampfdruck), kam ein Kohlewiderstand mit einer Konstantstromquelle zum Einsatz - dessen Widerstand wie in einem Halbleiter abhängig von der Temperatur gemäß

$$R(T) \propto U(T) \propto a \cdot e^{b/T} \quad (6)$$

ist. Während des Abkühlens kann der Widerstand mit Hilfe des gemessenen Drucks und einer Dampfdrucktabelle aus [1] geeicht werden. Eine weitere Möglichkeit der Eichung erfolgt mit Hilfe des  $\lambda$ -Punktes des Heliums und dem Siedepunkt  $T_s$  des Heliums bei Normaldruck.

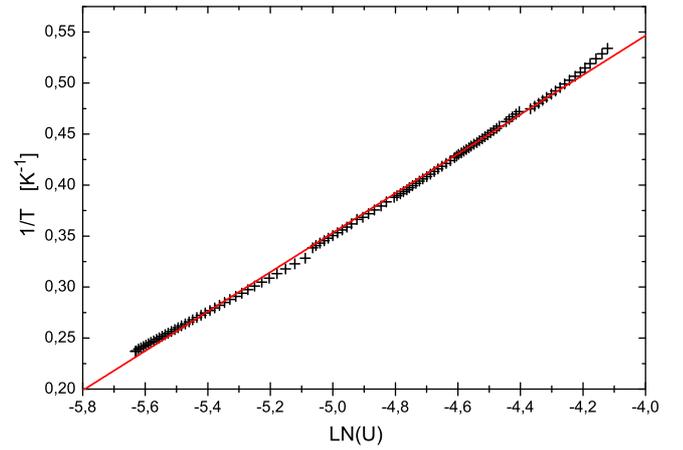


Abb. 4: Eichung des Kohlewiderstands durch Auftragung von  $LN(U)$  am Kohlewiderstand über  $1/T$  über Druck und Drucktabelle ermittelt

## IV. AUSWERTUNG

### A. Eichung des Kohlewiderstands

Nachdem der Kryostat durch Befüllen mit flüssigem Stickstoff und Helium und durch Evakuieren der Zwischenschichten abgekühlt war, konnte der Kohlewiderstand geeicht werden. Zu Beginn befand sich in der Helium-Kammer Umgebungsdruck, der nun mit einer Pumpe bis auf  $p = 17\text{ Torr}$  abgepumpt wurde. Bei konstantem Strom durch den Widerstand von  $I = 10\mu\text{ A}$  wurde der Spannungsabfall  $U$  gemessen. Der Druck wurde in den höheren Druckbereichen mit einem Digitaldruckmesser, bei niedrigen Drücken mit einem Analogdruckmesser gemessen. Der Fehler in der Druckmessung kann auf 3% angesetzt werden, der Fehler in der Spannungsmessung war im Schnitt geringer als 1%. Der Fehler in der Eichung entsteht durch Umrechnen von Druck in Torr und zum größten Teil durch das Anfitten (siehe Abb. 4).

Aus dem Fit erhält man:

$$T = \frac{1}{A + B \cdot LN(U/V)} \cdot K \text{ mit:}$$

$$A = (1319,5 \pm 3,6) \cdot 10^{-3}$$

$$B = (1932,3 \pm 7,4) \cdot 10^{-4}$$

Eine andere Möglichkeit, den Widerstand zu eichen, ist über Siedepunkt  $T_s$  und den  $\lambda$ -Punkt  $T_\lambda$  des flüssigen Heliums. Mit der Spannung am Kohlewiderstand  $U = 3,508\text{ mV}$  bei Normaldruck, also bei  $T_s = 4,22\text{ K}$  [4], und mit  $U = 12,069\text{ mV}$  bei  $T_\lambda = 2,18\text{ K}$  kommt man zu den Eichparametern:

$$A = 1173 \cdot 10^{-3}$$

$$B = 1794 \cdot 10^{-4}$$

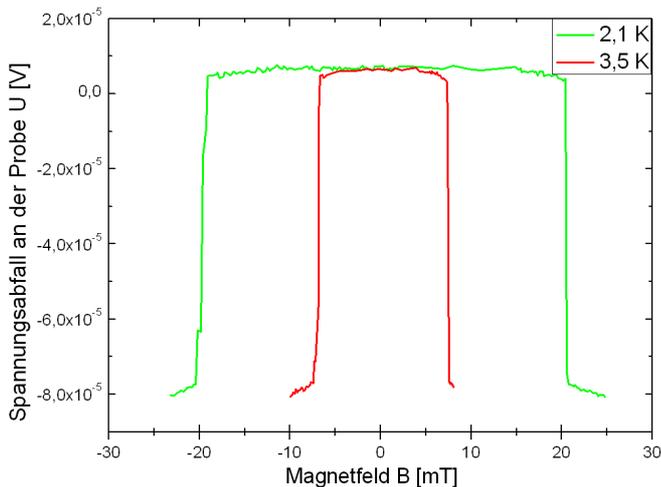


Abb. 5: Messwerte der Probenspannung  $U$  in Abhängigkeit des angelegten Magnetfeldes  $B$  für zwei verschiedene Temperaturbereiche

Eine brauchbare Fehlerabschätzung ist hier allerdings nicht möglich, da es schwer war den  $\lambda$ -Punkt des Heliums durch den sprudelnden Stickstoff zu erkennen, so dass ein großer Fehler nicht auszuschließen ist. Deshalb verwenden wir im weiteren die Eichung mit Hilfe des Dampfdruckes.

### B. Bestimmung des kritischen Magnetfeldes $H_c$

Mit der Eichung des Kohlewiderstandes und mit dem aus dem Theorieteil bekannten Magnetfeld  $B = 39,39 \text{ mT} \cdot I/A$  konnten wir nun für verschiedene Temperaturen das kritische Magnetfeld bestimmen. Dazu wurde der Druck über dem nun 1,8K kalten Helium langsam erhöht und gleichzeitig der Spulenstrom mit einem Dreiecksgenerator durchgeföhren. Der Spulenstrom wurde in beiden Polaritätsbereichen durchgeföhren, um Hystereseeffekte zu vermeiden. Durch die Zinnprobe floss stets ein Strom von  $I_P = 100 \text{ mA}$ , den Spannungsabfall  $U_P$  haben wir über einem  $R = 1\Omega$  (1% Abweichung) gemessen. In Abbildung 5 sind für zwei verschiedene Temperaturen der Spannungsabfall in der Nähe der jeweils kritischen Temperaturen aufgetragen. Zum einen wird daran die steile Flanke an der Sprungtemperatur wie auch der symmetrische Signalverlauf deutlich, zum anderen das bei höheren Temperaturen geringer werdende kritische Magnetfeld  $B$ .

In Abbildung 6 ist das Ergebnis der temperaturabhängigen Sprungtemperaturmessung zu sehen, die Abhängigkeit der Sprungtemperatur vom äußeren Magnetfeld  $B$  konnte dabei im Bereich von 1,93 K bis 3,75 K gemessen werden. Durch anfitzen von Gleichung(1) erhält man die Fitparameter:

$$B_{c0} = (29,1 \pm 0,8) \text{ mT}$$

$$T_c = (3,72 \pm 0,01) \text{ K}$$

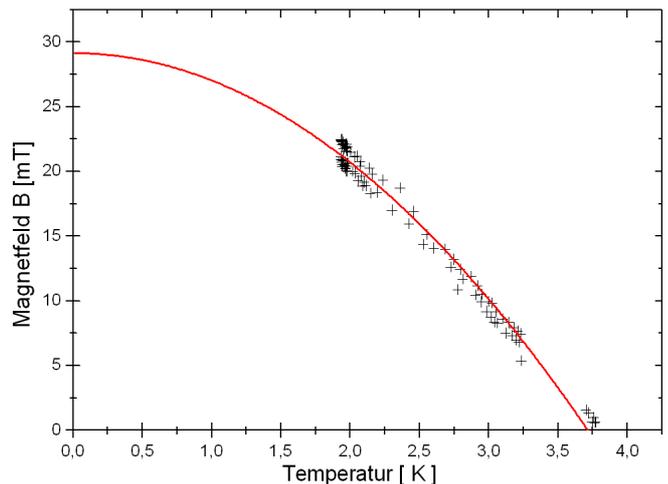


Abb. 6: Bestimmung des kritischen Magnetfeldes durch Extrapolation auf  $T=0$

Der Literaturwert für das kritische Magnetfeld ist  $B_{c0} = 30,9 \text{ mT}$ , für die kritische Temperatur  $T_c = 3,722 \text{ K}$ . Die Abweichungen sind 6% bzw. unter 0,1%; der größte Fehler in der Messung kommt vom quadratischen Fit, da nur ein kleiner Ausschnitt an Werten zu Verfügung stand. Ein weiterer großer Fehler entsteht in der Berechnung des Magnetfeldes aus dem Spulenstrom, schon allein der Unterschied zwischen numerischer und Näherungslösung beträgt 4%. Zuletzt muss noch erwähnt werden, dass auch die Temperaturmessung fehlerbehaftet, wie auch das genaue Auffinden der Sprünge im Spannungsabfall an der Zinnprobe.

### C. Bestimmung der kritischen Temperatur $T_c$

Im Experiment konnten wir die Sprungtemperatur  $T_c$  auch direkt messen, indem der Druck über dem Helium, und somit die Temperatur, im Bereich der Sprungtemperatur mehrmals durchgeföhren wurde. Aus dem Spannungsabfall am Kohlewiderstand wurde wieder die Temperatur bestimmt, aus dem Spannungsabfall über dem  $1\Omega$ -Widerstand konnte der Widerstand der Zinnprobe bestimmt werden.

In Abbildung 7 ist das Ergebnis der Messungen zu sehen. Die Ermittlung der Sprungtemperatur ist ebenfalls in Abbildung 7 zu sehen:

$$T_c = (3,80 \pm 0,01) \text{ K}$$

Die Sprungtemperatur  $T_c$  konnte ermittelt werden, indem man die Temperatur in Graphen bestimmt, bei der die Spannung an der Zinnprobe auf die Hälfte abgefallen war. Da die Messung dreimal wiederholt wurde, hat man auch aus dem Wertebereich der einzelnen Sprungtemperatur eine grobe Fehlerabschätzung machen. Die Abweichung von 2% vom Literaturwert  $T_c = 3,722 \text{ K}$  kommt zum größten Teil aus dem Fehler in der Tem-

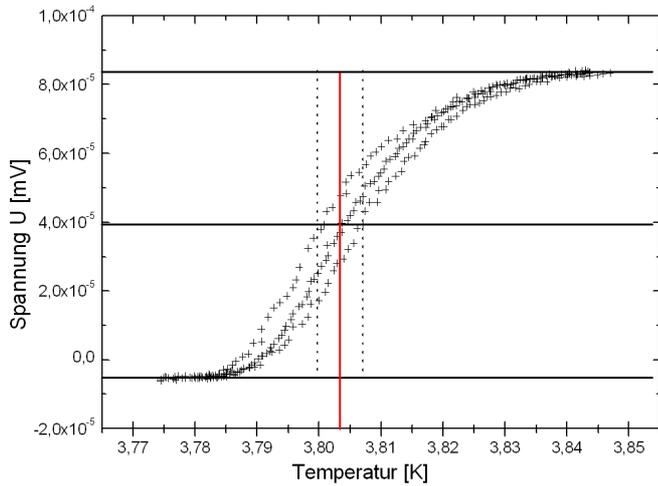


Abb. 7: Ermittlung der Sprungtemperatur aus dem Spannungsabfall  $U$  am Messwiderstand über der Temperatur durch dreimaliges Durchfahren der Temperatur

peraturmessung. Desweiteren können durch das schnell-

lere Durchfahren der Temperatur als im Abschnitt zuvor Temperaturschwankungen innerhalb des Messaufbaus entstanden sein. Zuletzt sei noch erwähnt, dass das lokale Erdmagnetfeld die Sprungtemperatur beeinflusst, allerdings werden dadurch die gemessenen Sprungtemperaturen geringer.

## V. ZUSAMMENFASSUNG

Abschließend lässt sich sagen, dass mit einem relativ einfach durchzuführenden Experiment mehrere Aspekte der Supraleitung untersucht werden konnte. Anzufangen wäre mit der Technik, um solch tiefe Temperaturen zu erreichen, dem Kryostaten mit flüssigem Stickstoff und Helium. An der Supraleitung selbst konnte das sprunghafte Verhalten des Widerstands beim Überschreiten der kritischen Temperatur  $T_c$  beobachtet werden. Im weiteren konnten wir die quadratische Abhängigkeit der Sprungtemperatur vom äußeren Magnetfeld überprüfen und schließlich noch das kritische Magnetfeld  $B_c$  bestimmen.

- 
- [1] Prof. Dr. E. Batke, Prof. Dr. F. Reinert: Versuchsanleitung F-Praktikum Supraleitung; Physikalisches Institut Würzburg  
 [2] W. Buckel: Supraleitung; 3. überarb. Aufl., Physik-Verl. Weinheim 1984  
 [3] Hermann Rudolf Betz: Planung und Aufbau eines Prak-

- tikumsversuches zur Messung der kritischen Temperatur und des kritischen Magnetfeldes von Zinn beim Übergang in den supraleitenden Zustand; Staatsexamensarbeit 1973, Universität Würzburg  
 [4] [www.wikipedia.de](http://www.wikipedia.de) Artikel: Helium, 10. Oktober 2006