Hall-Effekt

Michael Wiessner und Andreas Messer
Universität Würzburg Physikalisches Institut

Wir untersuchen den Hall-Effekt an einer p-dotierten Tellurprobe. Dabei konnte die Akzeptorkonzentration $n_A = (2{,}97 \pm 0{,}42)\ 10^{14}\mathrm{cm}^{-3}$, Die Bandlücke $E_{gap} = (332{,}5 \pm 1{,}2)\,\mathrm{meV}$, die Elektronenbeweglichkeit $\mu_e = (324 \pm 60)\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}$ und Löcherbeweglichkeit $\mu_p = (220 \pm 40)\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}$ der Tellurprobe bestimmt werden. Außerdem wurde der Zusammenhang zwischen Magnetowiderstand und Stärke des angelegten Magnetfeldes überprüft.

Durchführung: 10. Oktober 2006

Protokollabgabe: 12. Oktober 2006

I. EINLEITUNG

Bringt man einen stromdurchflossenen Leiter in ein zum Stromfluss senkrechtes Magnetfeld, kann man an den Seitenflächen des Leiters eine Spannung messen. Dieser Effekt wurde 1879 vom amerikanischen Physiker Edwin H. Hall entdeckt. Heute wird der Halleffekt gerne zur Bestimmung der Ladungsträgerbeweglichkeiten von Halbleitern eingesetzt.

Für unseren Versuch verwendeten wir eine p-dotierte Tellurprobe. Indem wir den Halleffekt bei verschiedenen Temperaturen und unterschiedlichen Strömen untersuchten konnten wir die Bandlücke $E_{gap} = (332{,}5 \pm 1{,}2)\,\mathrm{meV}$, die Elektronenbeweglichkeit $\mu_e = (220 \pm 50)\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}$, die Lochbeweglichkeit $\mu_p = (324 \pm 40)\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}$ und die Akzeptorkonzentration $n_A = (2{,}97 \pm 0{,}42)\ 10^{14}\mathrm{cm}^{-3}$ des Halbleiters ermitteln.

II. THEORIE

Legt man an einen Leiter ein elektrisches Längsfeld $\mathbf{E}_L$ an, bewegen sich die Ladungsträger entsprechend

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)\mathbf{v_D} = \frac{q}{m^*}\mathbf{E}_L. \tag{1}$$

Dabei bedeuten $\mathbf{v}_D$ die Driftgeschwindigkeit, q die Ladung, m^* die effektive Masse und τ die mittlere Stoßzeit des Ladungsträgers. Im stationären Fall findet man

$$\mathbf{v}_D = \frac{q\tau}{m^*}\mathbf{E}_L. \tag{2}$$

Die Geschwindigkeit der Ladungsträger wird durch Phononenstreuung und Streuung an Kristalldefekten mit der mittleren Stoßzeit τ begrenzt.

Um einen Ausdruck für die Leitfähigkeit zu erhalten definiert man zunächst die Ladungsträgerbeweglichkeit

$$\mu = \frac{|v_D|}{E} = \left|\frac{q\tau}{m^*}\right|. \tag{3}$$

Für den allgemeinen Fall mehrerer Ladungsträgerarten erhält man dann für die Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \sum_i |q_i|\, n_i \mu_i \tag{4}$$

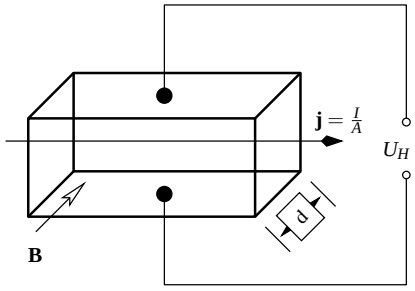

Abbildung 1: Halleffekt schematisch: Das Magnetfeld **B** bewirkt eine Hallspannung U_H an einem stromdurchflossenen Leiter. Die Größe d bedeutet die Dicke der Probe.

wobei über alle zur Leitung beitragenden Ladungsträger summiert wird.

Wird zusätzlich zum elektrischen Längsfeld ein dazu senkrechtes Magnetfeld **B** angelegt, werden die Ladungsträger senkrecht zu diesem abgelenkt:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)\mathbf{v_D} = \frac{q}{m^*}\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}\right) \tag{5}$$

mit $\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_H$. Im stationären Fall baut sich ein zu **B** und $\mathbf{E}_L$ senkrechtes Feld $\mathbf{E}_H$ auf, dass die durch das Magnetfeld verursachten Kräfte auf die Ladungsträger kompensiert.

Unter Beachtung der Probengeometrie (Abbildung 1) findet man für die Hallspannung

$$U_H = R_H \frac{IB}{d} \tag{6}$$

wobei d die Dicke der Probe, I den Stromstärke durch die Probe und R_H die Hallkonstante der Probe bedeuten.

Die Form der Hallkonstante hängt von der Anzahl der an der Leitung beteiligten Ladungsträger ab. Liegt ein metallischer Leiter vor, so trägt nur eine Ladungsträgerart zur Leitung bei (unipolar). In diesem Fall hat die Hallkonstante die einfache Form

$$R_H = \frac{1}{nq} \tag{7}$$

mit der Ladungsträgerdichte n. Bei einem Halbleiter liegt bipolare Leitung vor, da sowohl Elektronen, als auch Löcher

(fehlende Elektronen) zur Leitung beitragen. Man findet

$$R_H = \frac{\mu_h^2 n_h - \mu_e^2 n_e}{e\left(\mu_h n_h + \mu_e n_e\right)^2} \tag{8}$$

für die Hallkonstante. Dabei bedeuten die Indizes die beiden Ladungsträgerarten Elektronen (e) und Löcher (h).

Für die Konzentrationen der Ladungsträger in einem idealen Halbleiter gilt

$$n_e = n_{e0} \exp\left(-\frac{E_{gap} - \varepsilon}{k_b T}\right) \tag{9}$$

$$n_h = n_{h0} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_b T}\right) \tag{10}$$

mit der Bandlücke E_{gap}, der Temperatur T und dem chemischen Potential ε. Die Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentrationen findet man auch in der Hallkonstante: Diese wird bei der sogenannten Inversionstemperatur nämlich null.

Beim Halleffekt kann es außerdem zum Phänomen des Magnetowiderstands kommen: Da die Geschwindigkeiten der Ladungssträger statistisch verteilt sind, wird die Kraft des magnetischen Feldes auf die Ladungsträger nur für wenige der Ladungsträger durch das Hallfeld kompensiert. Die Ladungsträger bewegen sich deshalb auf kreisförmigen Bahnen. Dadurch wird die effektive Driftgeschwindigkeit in Stromrichtung kleiner und der Widerstand mit zunehmenden Magnetfeld größer. Es gilt

$$\frac{R(B) - R(0)}{R(B)} \sim B^{\alpha} \tag{11}$$

mit dem Widerstand ohne Magnetfeld $R(0)$ und dem Widerstand mit Magnetfeld $R(B)$. Durch theoretische Überlegungen findet man für einen nichtentarteten Halbleiter $\alpha = 2$.

III. EXPERIMENT

Der Hall-Effekt wurde an einer p-dotierten Tellurprobe ($d = 1{,}63\,\mathrm{mm}$, $h = 2{,}74\,\mathrm{mm}$, $l = 8{,}35\,\mathrm{mm}$) untersucht. Diese befand sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten. Um eine hohe magnetische Feldstärke zu erreichen war der Magnet mit einem Eisenkern versehen. Die Temperatur der Probe wurde mittels gasförmigem und flüssigem Stickstoff verringert, wobei die Zuflussmenge mit einem Verdampfer geregelt wurde.

Zur Temperaturmessung kam ein Kupfer-Konstantan Thermoelement (Typ T) zum Einsatz. Vergleichstemperatur war die Raumtemperatur.

Die elektrische Beschaltung der Probe ist in Abbildung 2 gezeigt. Da es nicht möglich ist zwei Elektroden exakt gegenüber zueinander anzubringen und außerdem Kontaktpotentiale an den Elektroden auftreten, wurde die Probe mit drei Elektroden ($x = 4{,}20\,\mathrm{mm}$) versehen. Indem vor jeder Messung die Hallspannung U_H bei abgschaltetem Magnetfeld mittels des Potentiometers auf null justiert wurde, konnte der Einfluss

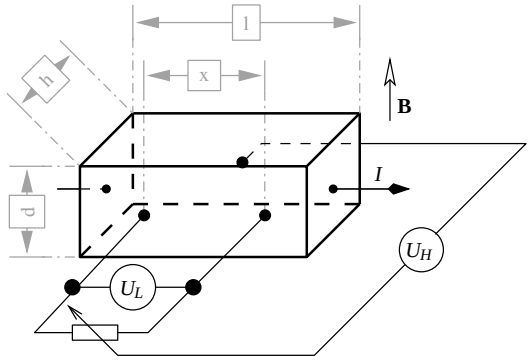

Abbildung 2: Elektrische Beschaltung der Tellurprobe. Die Drei-Elektroden-Beschaltung dient zum Eliminieren störender Einflüsse.

dieser Störfaktoren stark gemindert werden. Die Längsspannung U_L wurde zur Bestimmung der Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{x}{hd} \cdot \frac{I}{U_L} \tag{12}$$

genutzt.

Der Versuch gliederte sich in mehrere Teile. Zunächst wurde die Hysterese-Kurve des Elektromagneten bestimmt. Dazu wurde der Strom des Magnet I_B einmal komplett durchgefahren: $0\,\mathrm{A} \rightarrow 15\,\mathrm{A} \rightarrow -15\,\mathrm{A} \rightarrow 0\,\mathrm{A}$ und dabei die Stärke des Magnetfeldes mittels einer Hallsonde bestimmt. Als nächstes wurde das Ohmsche Verhalten der Tellurprobe geprüft. Dafür wurde die Längsspannung U_L für verschiedene Probenströmen I gemessen. Anschließend wurde der Halleffekt im Temperaturbereich von 300 bis 80 K untersucht. Dazu wurde die Hallspannung U_H bei einem Magnetstrom von $I_B = 10$ A und die Längsspannung U_L ohne Magnetfeld bei schrittweise sinkender Probentemperatur gemessen. Dabei betrug der Probenstrom zu Beginn $I = (8{,}02 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mA}$ und am Ende $I = (7{,}97 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mA}$. Um Einfüsse von Temperaturgradienten und Themospannungen zu eliminieren, wurde die Hallspannung auch bei jeweils umgepolten Magnet- und Probenstrom gemessen und über die vier Werte der Hallspannung gemittelt. Bei Raumtemperatur und bei der tiefsten stabilen Temperatur wurde die Längsspannung zusätzlich in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke B bestimmt.

IV. AUSWERTUNG

A. Eichung Thermoelement

Wie bereits beschrieben wurde die Temperatur der Tellurprobe mittels einem Typ T Thermoelement bestimmt. Die Vergleichsstelle wurde auf Raumtemperatur gehalten. Da leider kein Thermometer vorhanden war, konnte wir die Raumtemperatur $T_V \approx 18\,^{\circ}\mathrm{C}$ (291 K) nur abschätzen. Weil nur Eichkurven für eine Bezugstemperatur von 300 K vorhanden waren, haben wir zunächst eine eigene Eichkurve [4] erstellt. Um unsere Eichkurve zu prüfen haben wir die Thermospannung bei Kühlung mit Flüssigstickstoff in Temperatur umgerechnet und

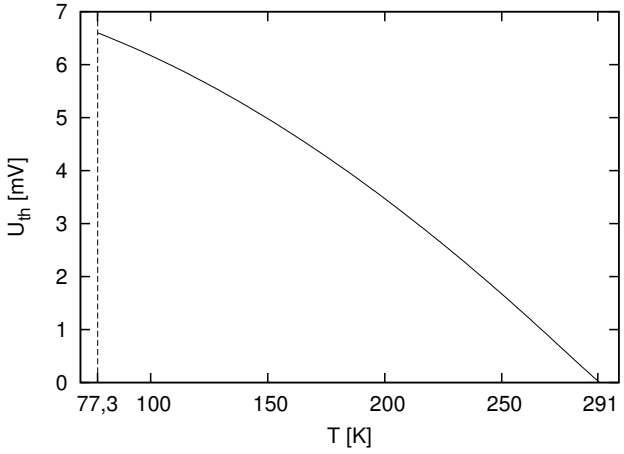

Abbildung 3: Der Plot zeigt den Zusammenhang zwischen Thermospannung und Temperatur der zur Temperaturberechnung herangezogen wurde.

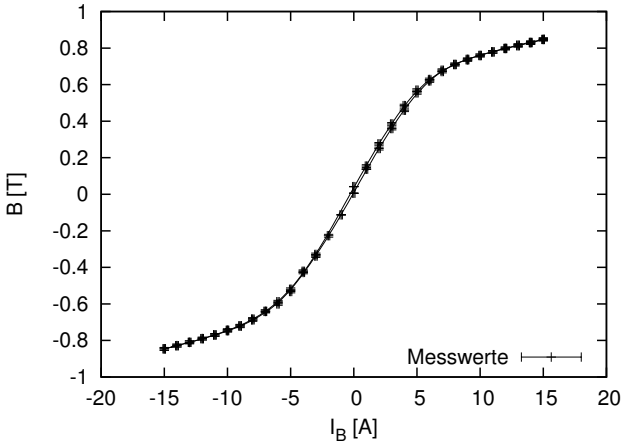

Abbildung 4: Hysteresekurve des Elektromagneten. Die Einstellgenauigkeit im Magnetstrom war $\pm 0{,}1\,\mathrm{A}$. Der Fehler im Magnetfeld wird durch den Messbereich, die Ablesegenauigkeit von 0,5 Teilstrichen und die Güteklasse 0,5 der Hallsonde bestimmt.

mit der Siedetemperatur von Stickstoff verglichen:

$$\begin{aligned} T_{exp} &= 53{,}7\,\mathrm{K} \\ T_{SN_2} &= 77{,}3\,\mathrm{K}. \end{aligned}$$

Hauptursache der großen Abweichung, sind eine Zunahme der Raumtemperatur sowie zusätzliche an den Steckverbindungen auftretende Thermospannungen. Wir nehmen an, dass diese Effekte linear mit der Zeit und somit in erster Näherung auch in der Thermospannung (Wir haben die Temperatur während des Experiments einmal von Raumtemperatur 291 K bis 77 K durchgefahren) die Messung beeinflussen. Daher korrigieren wir die Thermospannungen mit

$$U_{th\,real} = \alpha U_{th\,mess} \tag{13}$$

wobei $\alpha = 0{,}9462$ mit der Bedingung $U_{th}(T = 77{,}3K) \stackrel{!}{=} 6{,}60\,\mathrm{mV}$ gefunden wurde. Die so korrigierte Eichkurve ist in Abbildung 3 dargestellt.

B. Hysteresekurve des Elektromagneten

Für den Eisenkern im Elektromagneten wurde ein magnetisch weiches Material verwendet. Dies ist an dem geringen Hystereseverhalten (Abbildung 4) gut erkennbar. Besonders bei großen Strömen ist das Hystereseverhalten kaum erkennbar. Daher wurden die Hallmessungen bei einem Magnetstrom von $I_B = \pm 10\,\mathrm{A}$ durchgeführt. Durch Mittelung über die vier Werte finden wir für die magnetische Feldstärke

$$B(|I| = 10\,\mathrm{A}) = (752{,}3 \pm 8{,}5)\ \mathrm{mT}.$$

C. Ohmsches Verhalten der Tellurprobe

Der an der Tellurprobe gemessene Spannungs-Strom-Zusammenhang ist in Abbildung 5 dargestellt. Die theoretisch

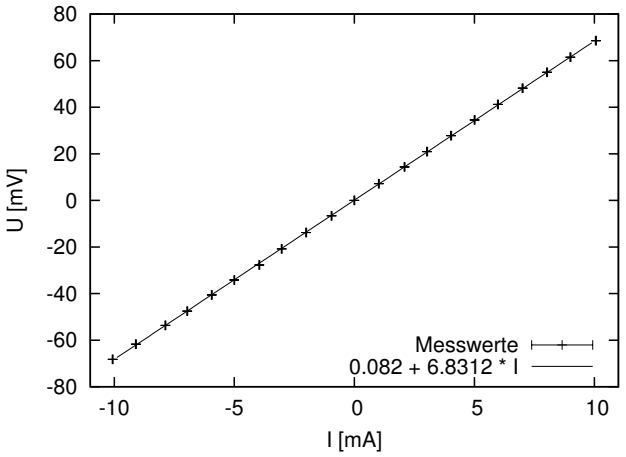

Abbildung 5: Die Grafik zeigt die Längsspannung U_L in Abhängigkeit vom an die Probe angelegten Strom I. Es ist deutlich der lineare Zusammenhang zu erkennen. Die Fehlerbalken sind nicht zu erkennen, da die Messfehler aufgrund der hohen Genauigkeit der Messgeräte sehr klein sind.

zu erwartende lineare Abhängigkeit ist sehr gut erfüllt. Es gilt

$$U_L = RI = \rho \frac{x}{hd} I. \tag{14}$$

Dabei bedeutet ρ den spezifischen elektrischen Widerstand von Tellur bei Raumtemperatur und x, h und d die geometrischen Daten der Probe. Durch linearen Fit der Messdaten finden wir für den spezifischen elektrischen Widerstand von Tellur bei Raumtemperatur

$$\rho = (72{,}64 \pm 0{,}10)\ \mu\Omega\mathrm{m}.$$

Der angegebene Fehler wurde dem Fit entnommen.

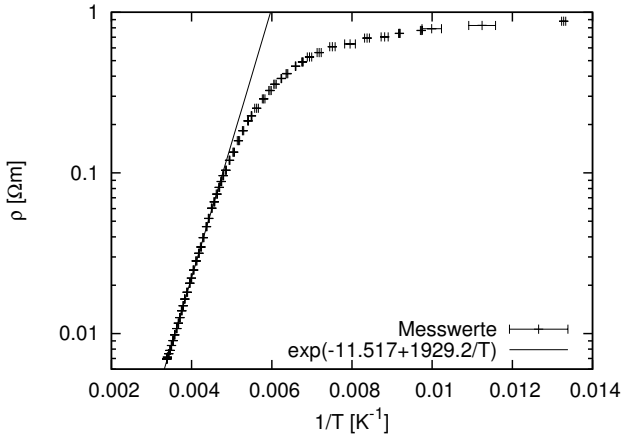

Abbildung 6: Der Plot zeigt den Zusammenhang zwischen spezifischen elektrischen Widerstand und inverser Temperatur. Aus dem Anstieg der Fitgeraden im intrinsischen Bereich erhalten wir die Bandlücke von Tellur.

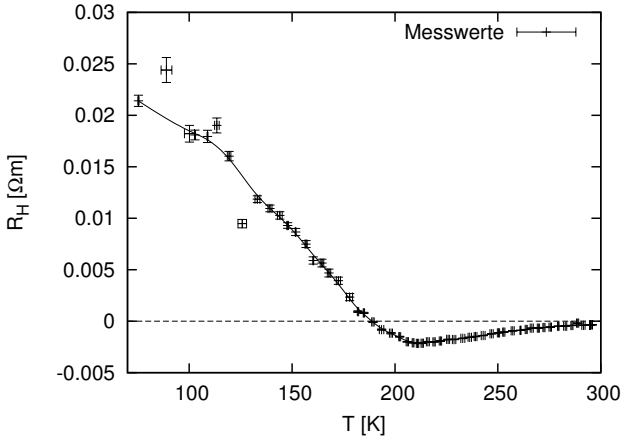

Abbildung 7: Hallwiderstand R_H als Funktion der Temperatur. Der Inversionspunkt ist deutlich zu erkennen.

D. Bandlücke von Tellur

Die Ladungsträgerkonzentrationen eines p-dotierten Halbleiter (Akzeptorkonzentration n_A) werden im intrinsischen Bereich (Eigenleitung) gut durch (9) und (10) beschrieben ($n_A << n_p \rightarrow n_{pges} = n_A + n_p \approx n_p$). Für den spezifischen elektrischen Widerstand gilt

$$\rho = \sigma^{-1} \sim \frac{1}{n_i} \tag{15}$$

mit der intrinsischen Ladungsträgerkonzentration

$$n_i = \sqrt{n_e n_h} = \sqrt{n_{e0} n_{h0}} \exp\left(-\frac{E_{gap}}{2k_B T}\right). \tag{16}$$

Durch Auftragung von $\ln\rho$ über der inversen Temperatur (Abb. 6) konnten wir die Bandlücke von Tellur zu

$$E_{gap} = (332{,}5 \pm 1{,}2)\ \text{meV}$$

bestimmen. Der Fehler wurde aus dem Fehler in der Geradensteigung bestimmt. Die Abweichung vom Literaturwert $E_{gap} = 334\,\text{meV}$ beträgt 0,45 %.

E. Inversionstemperatur und Verhältnis der Ladungsträgerbeweglichkeiten

Die Elektronenkonzentration n_e und die Löcherkonzentration n_h eines Halbleiters sind temperaturabhängig. Dies wirkt sich auch auf die Hallkonstante aus. Insbesondere kann die Hallkonstante ihr Vorzeichen wechseln. Die Temperatur, bei der das geschieht wird auch als Inversionstemperatur T_{inv} bezeichnet. Nach (8) gilt

$$R_H\,(T = T_{inv}) = 0 = \mu_h^2 n_h - \mu_e^2 n_e. \tag{17}$$

Um n_e und n_h aus der Gleichung zu eliminieren, betrachten wir die Leitung im Halbleiter. Am Inversionspunkt gilt $n_h = n_A + n_e$. Somit erhalten wir für die Leitfähigkeit

$$\sigma_{inv} = e\,(\mu_h n_A + (\mu_h + \mu_e)\,n_e)\,. \tag{18}$$

Im extrinsischen Bereich (Störstellenleitung) ist die Elektronenkonzentration jedoch null, da die thermische Energie der Elektronen nicht ausreicht um die Bandlücke zu überwinden. Hier gilt für die Leitfähigkeit

$$\sigma_{ext} = e\mu_h n_A. \tag{19}$$

Extrapoliert man nun die extrinsische Leitfähigkeit bis zur Inversionstemperatur, so erhält man mit (17), (18) und (19) einen Ausdruck für das Verhältnis zwischen Elektronen- und Löcherbeweglichkeit:

$$\frac{\mu_e}{\mu_h} = \frac{\sigma_{inv}}{\sigma_{inv} - \sigma_{ext}} = \left(1 - \frac{\rho_{inv}}{\rho_{ext}}\right)^{-1} \tag{20}$$

Der Inversionspunkt wurde anhand des Verlaufs des Hallwiderstandes abgeschätzt (vgl. Abbildung 7):

$$T_{inv} = (188 \pm 1)\ \text{K}$$

Der Fehler wurde aufgrund der in der Nähe des Inversionspunktes liegenden Messwerte geschätzt. Den spezifischen Widerstand lesen wir aus Abbildung 8 am Inversionpunkt ab. ρ_{ext} erhalten wir durch Extrapolation von ρ aus dem extrinisischen Bereich an den Inversionspunkt.

Wir lesen mit Fehlern die Werte

$$\begin{aligned} \rho_{inv} &= (196{,}0 \pm 4{,}9)\ 10^{-3}\Omega\text{m} \\ \rho_{ext} &= (607 \pm 46)\ 10^{-3}\Omega\text{m} \end{aligned}$$

ab. Der große Fehler in ρ_{ext} hängt mit der geringen Anzahl an Datenpunkten im extrinsischen Bereich zusammen. Mit (20) finden wir

$$\frac{\mu_e}{\mu_h} = (1{,}476 \pm 0{,}053)$$

für das Verhältnis zwischen Elektronen- und Lochbeweglichkeit am Inversionspunkt

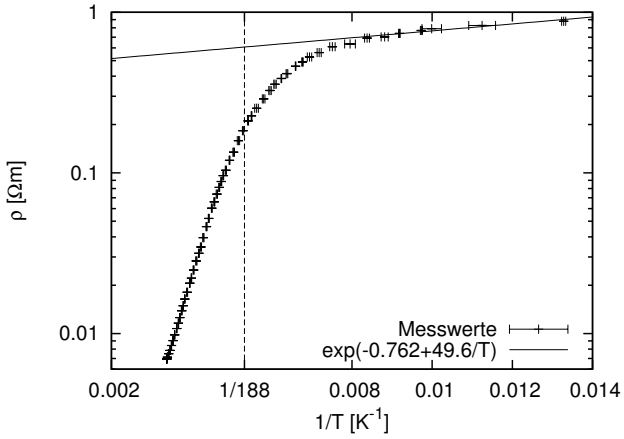

Abbildung 8: Spezifischer Widerstand ρ der Tellurprobe als Funktion der inversen Temperatur. Die Gerade stellt eine Extrapolation des spezifischen Widerstandes aus dem extrinsischen Bereich dar.

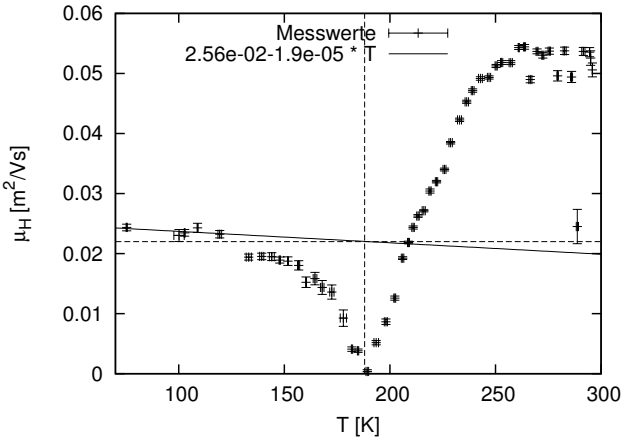

Abbildung 9: Hallbeweglichkeit als Funktion der Temperatur. Die Gerade ist eine lineare Extrapolation der Hallbeweglichkeit an den Inversionspunkt.

F. Löcher- und Elektronenbeweglichkeit

Im extrinsischen Bereich tragen wie im vorhergehenden Abschnitt erklärt nur noch die Löcher zur Leitfähigkeit bei. Es gilt

$$\mu_h = \frac{n_h e \mu_h}{n_h e} = \frac{R_H}{\rho_{ext}} = \mu_H \tag{21}$$

wobei μ_H die Hallbeweglichkeit bedeutet.

Durch lineare Extrapolation an den Inversionspunkt (vgl. Abbildung 9) erhalten wir für die Löcherbeweglichkeit bei Inversionstemperatur

$$\mu_h = (220 \pm 40)\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}.$$

Der große Fehler liegt an der großen Streuung der Hallbeweglichkeiten im extrinsischen Bereich und wurde der Standardabweichung der Geradensteigung entnommen.

Mit Hilfe des vorher berechneten Verhältnisses von Elektronen- zu Löcherbeweglichkeit finden wir für die Elektronenbeweglichkeit

$$\mu_e = (324 \pm 60)\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}.$$

Der Fehler aus der Löcherbeweglichkeit schlägt sich auch in diesem Ergebniss nieder. Ein Vergleich mit Literaturwerten ist nicht möglich, da die Beweglichkeiten von vielen Faktoren abhängen. Das Ergebniss ist jedoch plausibel, da die Elektronenbeweglichkeit im Allgemeinen größer als die Löcherbeweglichkeit ist.

G. Akzeptorkonzentration

Im extrinsischen Bereich gilt aus weiter vorne beschriebenen Gründen

$$R_H = \frac{1}{e n_h} = \frac{1}{e n_A}. \tag{22}$$

Wir setzten den Hallwiderstand bei 77 K

$$R_H\,(T = 77\,\mathrm{K}) = (21 \pm 3)\ 10^{-3}\mathrm{m}^3/\mathrm{C}$$

in obige Gleichung ein und erhalten

$$n_A = (2{,}97 \pm 0{,}42)\ 10^{14}\mathrm{cm}^{-3}$$

für die Akzeptorkonzentration in der Probe. Der Fehler im Hallwiderstand wurde anhand der Streuung im extrinsischen Bereich (Abbildung 7) abgeschätzt.

H. Magnetowiderstand

Abbildung 10 zeigt eine LogLog Auftragung der normierten Widerstandsänderung als Funktion des Magnetfeldes. Anhand des Verlaufes beider Messreihen kann man von einem Potenzgesetz (11) ausgehen. Um den Exponenten zu bestimmen wurde je eine Gerade an jede Messreihe gefittet. Bei der Messreihe der Temperatur $T = 291\,\mathrm{K}$ ist im Bereich niedriger Magnetfelder eine Abweichung vom erwarteten Verlauf vorhanden. Deswegen wurden die ersten vier Punkte für diesen Fit nicht verwendet. Anhand des Geradenanstiegs und dessen Standardfehler erhalten wir für die Exponenten

$$\begin{aligned} \alpha_{T=291\,\mathrm{K}} &= (2{,}016 \pm 0{,}028) \\ \alpha_{T=77\,\mathrm{K}} &= (1{,}905 \pm 0{,}016)\,. \end{aligned}$$

Diese Werte stimmen im Wesentlichen mit der theoretischen Erwartung $\alpha = 2$ überein. Zu beachten ist, dass der theoretische Wert im strengen Sinne nur für ein entartetes Löchergas gilt, das hier jedoch nicht vorliegt. Somit ist eine genaue Übereinstimmung nicht unbedingt zu erwarten.

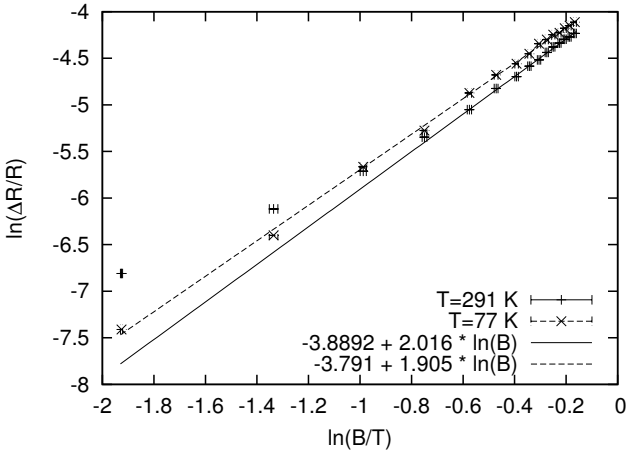

Abbildung 10: Die Grafik zeigt eine doppelt logarithmische Auftragung der normierten Widerstandsänderung $\frac{R(B)-R(0)}{R(B)}$ in Abhängigkeit von angelegtem Magnetfeld. Für die Fitgerade der Messwerte bei Raumtemperatur (291 K) wurden die ersten vier Werte nicht verwendet, da der Verlauf stark von einem Potenzgesetz abweicht.

I. Zusammenfassung

Wir haben in einem aufschlussreichen Versuch den Halleffekt an einer Tellurprobe untersucht. Dabei haben wir außerdem einen Einblick in experimentelle Analysemethoden der Halbleiterphysik erhalten. So konnten wir trotz des einfachen Aufbaus einen sehr guten Wert für die Bandlücke von Tellur erhalten. Weiterhin haben wir Erfahrungen im Umgang mit flüssigem Stickstoff machen können.

Kleine Anmerkung zum Versuchsaufbau. Unserer Meinung nach wäre es sehr sinnvoll, die Vergleichstemperatur des Thermoelement mittels Eiswasser auf 0 °C zu halten, da dies der übliche Referrenzpunkt für Thermoelemente ist. Die ausliegenden Eichkurven für $300\,K$ sind nicht sehr sinnvoll, da es unwahrscheinlich ist, dass die Raumtemperatur 300 K erreicht. Außerdem ist die Raumtemperatur nicht zeitlich konstant und verursacht so einen zusätzlichen Fehler.

[1] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971), 4th ed.
[2] E. H. Putley, *The hall effect and semi-conductor physics* (Dover, New York, 1960).
[3] A. C. Melissinos, *Experiments in modern physics* (Academic Press Inc., New York, 1966).
[4] *Nist its-90 thermocouple database*, http://srdata.nist.gov/its90/main.